Journal of Technology Research (JTR)
Volume 3, Special Issue, (2025), pp 505-514 ISSN 3005-639X
The 7th Conference of Engineering Sciences and Technology
(CEST-2025)

Solving Linear Programming Problems Using the Grey Wolf Optimizer in R

Jamal B. Oheba

Department of Industrial Engineering, Faculty of Industrial and Technology, Misrata, Libya.
*Corresponding author email: jamaloheba@yahoo.com

Received: 22-09-2025 | Accepted: 18-11-2025 | Available online: 25-12-2025 | DOI:10.26629/jtr.2025.47

ABSTRACT

This paper presents the Grey Wolf Optimizer (GWO), a metaheuristic algorithm inspired by the leadership hierarchy and cooperative hunting strategies of grey wolves, as an approach for solving linear programming models. The algorithm was implemented in R language using advanced programming techniques and the functions available in the MetaheuristicOPT library. Several linear programming problems were tested, and the proposed algorithm successfully obtained optimal solutions. The performance of GWO was compared with the classical Simplex method, Genetic Algorithms, and TORA Software. Results indicate that GWO is efficient and can be used effectively for solving such problems in operations research applications.

Keywords: Grey Wolf Optimizer (GWO), Linear programming, R language, MetaheuristicOPT library, Simplex method.

خوارزمية الذئب الرماديGWO بلغة R لحل نماذج البرمجة الخطية

جمال بشير أوهيبة

قسم الهندسة الصناعية، كلية التقنية الصناعية، مصراتة، ليبيا.

ملخـــــــص البحـــــــث

خوارزمية الذئب الرمادي **(Grey Wolf Optimizer – GWO)** هي إحدى أساليب الذكاء الاصطناعي، وبالتحديد فرع من فروع الحوسبة التطويرية **(Evolutionary Computing)**، حيث برزت أهمية هذا الأسلوب في محاكاة السلوك الاجتماعي والقيادي لقطعان الذئاب الرمادية أثناء عملية الصيد في الطبيعة، وإيجاد حلول للعديد من مسائل الأمثلية **(Optimization problems)**. تهدف هذه الورقة البحثية إلى تقديم خوارزمية الذئب الرمادي لحل نماذج و مسائل البرمجة الخطية. الخوارزمية تم بناؤها بلغة **R** باستخدام البرمجة المتقدمة والدوال و الوظائف المتوفرة بالمكتبة **MetaheuristicOpt** المصاحبة لهذه اللغة، وأدى تطبيقها على عدد من نماذج البرمجة الخطية إلى إيجاد الحل الأمثل. أداء الخوارزمية المقترحة تم مقارنته بأبحاث منشورة وبالخوارزمية الجينية والطرق الأخرى، ومنها الطريقة المبسطة **(Simplex method)** والحزمة البرمجية **(Tora software)** وأوضحت نتائج المقارنة أن الخوارزمية المقترحة فعالة ويمكن استخدامها بكفاءة لحل المسائل المشابهة في مجال بحوث العمليات.

الكلمات الدالة: البرمجة الخطية ، لغة **R**، خوارزمية الذئب الرمادي ، المكتبة **MetaheuristicOpt** ، البرمجة بلغة **R**.

.

1. المقدمـة

تعد البرمجة الخطية من الأساليب الرياضية و العلمية الهامة في مجال بحوث العمليات والادارة الهندسية، حيث تهدف إلى إيجاد الحل الأمثل لمشكلات تتضمن تعظيم أو تقليل دالة هدف تخضع لمجموعة من القيود الخطية. إن صياغة نموذج البرمجة الخطية يتطلب تحديد ثلاثة عناصر أساسية، أولها دالة الهدف، وتبين هذه الدالة الهدف الذي نسعى لتحقيقه، ويكون الهدف عادة هو زيادة الأرباح أو تقليل التكاليف، وثانيهما تحديد القيود على المشكلة قيد الدراسة والتعريف عنها بمتباينات تتوافق مع الأنشطة، وأخيراً ضمان واقعية الحلول باستبعاد الخيارات غير المنطقية كالكميات السالبة، ويعني هذا أن جميع المتغيرات في المشكلة قيد الدراسة لا يمكن أن تكون سالبة بل تكون موجبة أو صفرية **[2]**. يمكن حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام ثلاث طرق شائعة في مجال بحوث العمليات، أولها الطريقة البيانية (The Graphical method) وثانيهما الطريقة الجبرية (Algebraic Method) وأخيراً الطريقة المبسطة (The Simplex Method) **[3]**.

إن التطورات الحديثة في مجال الخوارزميات التطويرية والذكاء الاصطناعي أدت إلى بروز أهمية خوارزمية الذئب الرمادي (GWO) كواحدة من أحدث وأكثر الطرق كفاءة وفاعلية في حل مشاكل التحسين المعقدة. هذه الخوارزمية مستوحاة من السلوك الاجتماعي والهيكل الهرمي لقطعان الذئاب الرمادية أثناء عملية الصيد في الطبيعة. تم تقديم هذه الخوارزمية بواسطة الباحث Mirjalili و آخرون عام 2014. وقد أثبتت كفاءتها في مجالات متعددة مثل الهندسة والعلوم التطبيقية **[4]**.

إن التطورات الحديثة أيضاً في مجال لغات البرمجة قد وفرت تقنيات عالية أدت إلى ظهور وانتشار لغة R والمكتبات المصاحبة لها، التي يمكن استخدامها لدراسة وتحليل العديد من المسائل الرياضية بمفاهيم جديدة لم تكن موجودة من قبل. فقد قدم الباحث Mirjalili وآخرون (2014) خوارزمية الذئب الرمادي (GWO) لأول مرة وثم تطبيقها علي مسائل رياضية معيارية متعددة الأبعاد أثبتت أنها فعالة مقارنة بالحل الأمثل للخوارزميات التقليدية **[4]**. وفي تطور بارز وهام قدم الباحث Riza و آخرون (2019) مكتبة باسم MetaheuristicOpt تتكون من مجموعة كبيرة من الخوارزميات الحديثة مثل خوارزمية الجيب وجيب التمام (Sine-cosine algorithm) (SCA) وخوارزمية صقر هاريس (Harris Hawks) optimization (HHO) وخوارزمية والفراشة واللهب (Fire Fly Algorithm) (FFA) وخوارزمية التناغم الموسيقي (Harmony search) (HS) وخوارزمية الثقب الأسود (Black Hole optimization) (BHO) وخوارزمية الحوت (Whale optimization Algorithm) (WOA) وخوارزمية تلقيح الأزهار Flower Pollination Algorithm) (FPA) لحل المسائل الرياضية والهندسية المختلفة **[5]**. وفي تطور بارز وهام أيضاً، قدم الباحث Henningsen (2022) مكتبة حديثة باسم Linprog تتكون من مجموعة كبيرة من الدوال والوظائف لحل مسائل البرمجة الخطية المتنوعة باستخدام خوارزمية الطريقة المبسطة **[6]**. وفي جانب آخر قدم الباحث Makhadmeh وآخرون (2024) مراجعة شاملة لأكثر من200 بحث علمي يتعلق بخوارزمية الذئب الرمادي وتحديد نقاط القوة والضعف والتطوير وكذلك مجالات التطبيق **[7]**. وفي تحليل نماذج البرمجة الخطية، قدم الباحث Mon (2019) في دراسة سابقة، كيفية تطبيق خوارزمية الطريقة المبسطة لحل مسائل التعظيم في البرمجة الخطية **[8]**. كما قدم الباحث Danfulani وآخرون (2022) نموذج برمجة خطية أثبت أنه فعال في إيجاد الحل الأمثل لتخطيط الانتاج **[9]**. كما قدم الباحث علي سحر (2023) نموذج برمجة خطية، أثبت أنه يمكن استخدامه بكفاءة في تحديد المزيج الأمثل للإنتاج في ظل ندرة الموارد الاقتصادية المتاحة **[10]**. وفي حين قدم الباحثان

Agrawal و Kumar (2022) نموذج برمجة خطية بالاعتماد على خوارزمية الطريقة المبسطة في حل نظرية المباريات(game theory) **[11]**. وفي دراسة مشابهة قدم الباحثان Samuel وEkoko (2024) نموذج برمجة خطية أثبتا أنه فعال في إيجاد الحل الأمثل لنظرية المباريات **[12]**. كما قدم الباحثان Baki و Cheng (2021) نموذج برمجة خطية في حالة التعظيم، أثبتا أنه فعال في تحديد المزيج الأمثل للإنتاج **[13]**. كما أقترح الباحثان حسين افتخار و عبدالله سوزان (2023) حل مشكلة البرمجة الخطية في حالات عدم اليقين من خلال برمجة الفاصلة التقريبية لمعاملات دالة الهدف والقيود **[14]**.

وفي تحليل مسائل البرمجة الخطية باستخدام أسلوب الذكاء الاصطناعي، قدم الباحثان Amali و Vijayarajan (2015) خوارزمية سرب الجسيمات التقليدية PSO ونسخها المعدلة لحل مسائل البرمجة الخطية الدورية (cycling linear programming) **[15]**. كما قدم الباحثان Aliannezhadi وMolai (2021) خوارزمية ضبابية (Fuzzy) لحل نماذج البرمجة الخطية، وتوصل الباحثان إلى أن الخوارزمية فعالة في إيجاد حل للمسائل المشابهة **[16]**. كما قدم الباحث سلمان منى(2024) خوارزمية جينية لحل نماذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم، وتوصل الباحث إلى أنه من المهم ضبط متغيرات الخوارزمية الجينية، عند الوصول إلى الحل الأمثل، كما أثبت أنها فعالة مقارنة بالحل الأمثل للطريقة المبسطة **[17]**.

في هذا السياق فإن MetaheuristicOpt هي إحدى المكتبات (الحزم) في لغة R تم إصدارها بتاريخ 2019/8/29 تتكون من مجموعة عديدة من الأوامر والوظائف الخاصة بتطبيق الخوارزميات الحديثة لحل المسائل الرياضية المختلفة. في هذه الورقة البحثية تم استخدامها لبناء خوارزمية الذئب الرماديGWO لإيجاد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية في حالة التعظيم والتقليل والحالة الدورية.

2. نموذج البرمجة الخطية

الصيغة الرياضية لنموذج البرمجة الخطية يمكن كتابته على الصورة التالية [1]:

$$Min\ or\ Max\ \ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \dots\dots\dots\ (1)$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ x_{j\ (\le,=,\ge) b_i}\ \ (\text{i1,2, …, m}) \dots (2)$$

$$x_{j\ge}\ 0 \qquad (\text{j} = 1.,2, \dots..\text{n}) \dots\dots\dots \quad (3)$$

حيث أن

a, b, c ثوابت تحدد من سياق المشكلة.

z دالة الهدف تعظيم أو تقليل.

x_j المتغيرات المطلوب اتخاذ قرار بخصوصها.

b_i تمثل الموارد المحددة.

a_{ij} كمية الموارد المحددة من النوع i واللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط j.

c_j تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لإنتاج وحدة واحدة من النشاط j..

يتكون نموذج البرمجة الخطية الرياضي من ثلاثة عناصر أساسية، أولها دالة الهدف التي تعبر عن الهدف المراد الوصول إليه وفقاً للمعادلة (1)، وهي عبارة عن دالة خطية بدلالة متغيرات القرار، وعادة يتم تعظيمها **(Max)** أو تقليلها **(Min)**، وثانيهما القيود الأساسية وفقاً للمعادلة (2)، وهي عبارة عن متباينات أو معادلات خطية تمثل العوامل أو الظروف المحيطة بالمشكلة، والتي في حدودها سوف يتم اتخاد القرار، وأخيراً شرط عدم السالبية وفقاً للمعادلة (3)، والتي تعني بأن تكون جميع متغيرات القرار الداخلة في النموذج الرياضي إما موجبة أو صفرية **[2]**. يستخدم نموذج البرمجة الخطية في حل مسائل التخصيص، والنقل، والشحن، وتخطيط الاستثمارات، وتحديد المزيج الإنتاجي الأمثل، ونظرية المباريات، والعديد من الاستخدامات الأخرى **[3]**.

3. المنهجية العلمية

3.1 خوارزمية الذئب الرمادي

خوارزمية الذئب الرمادي (GWO) هي إحدى الخوارزميات الحديثة في مجال خوارزميات الذكاء الاصطناعي التطويرية، مستوحاة من السلوك الاجتماعي والهرمي للذئاب الرمادية أثناء عملية الصيد في الطبيعة. تقوم الفكرة الأساسية لهذه الخوارزمية على مبدأ محاكاة التسلسل القيادي داخل قطعان الذئاب الرمادية، حيث يعتمد القطيع على هيكل قيادي هرمي يتكون من أربع فئات رئيسية: الذئب ألفا(α) الذي يمثل القائد والمسؤول عن اتخاذ القرارات، يليه الذئب بيتا(β) الذي يعمل كمساعد وداعم للألفا، ثم الذئب دلتا (δ) الذي يقوم بدور الوسيط وينقل الأوامر بين القائد والذئاب الأخرى ، وأخيراً الذئاب أوميغا (ω) التي تمثل الأفراد الأقل رتبة و المنفذين للأوامر من الذئاب الأعلى. هذا التدرج القيادي يمنح الخوارزمية القدرة على التوازن بين عمليتي الاستكشاف (Exploration) التي تمثل قدرة الذئاب على البحث في مناطق جديدة وغير مستكشفة من فضاء الحلول، مما يزيد من احتمال العثور على حلول جديدة، بينما تركز عملية الاستغلال (Exploitation) على تحسين الحلول الحالية وتقريبها من الحل الأمثل **[4]**.

ترتكز آلية عمل الخوارزمية على ثلاث مراحل أساسية للصيد؛ ففي البداية تقوم الذئاب (الحلول الأولية) بعملية التتبع والملاحقة (tracking and Pursuing) والبحث عن الفريسة (الحل الأمثل) من خلال تقييم مواقع الذئاب في مناطق واسعة في فضاء البحث للمشكلة قيد الدراسة، عند تحديد موقع الفريسة تبدأ الذئاب في عملية الحصار والتطويق (Encircling) ثم تتم عملية المطاردة حيث تُقرب الذئاب مواقعها تدريجياً نحو الفريسة باستخدام معادلات رياضية تحاكي الحركة الدائرية والاقتراب، وفي المرحلة الأخيرة عندما تتوقف الفريسة عن الحركة تقوم الذئاب بالهجوم و الانقضاض Attacking the prey والتوجه نحو الحل الأمثل بواسطة الذئاب الألفا التي تمثل أفضل الحلول و البيتا التي تمثل ثاني أفضل الحلول والدلتا التي تمثل ثالث أفضل الحلول و الذئاب أوميغا التي تمثل باقي الحلول للمسألة قيد الدراسة **[4,7]**.

3.2 لغة R والمكتبة MetaheuristicOpt

بدأت لغة R في جامعة أوكلاند بنيوزلندا، وسميت بالحرف R نسبة إلى الحرف الأول من الباحثين Robert Gentlmen, Ross Ihaka, وكان أول اصدار لهذه اللغة سنة 1997. تعد لغة R واحدة من أهم لغات البرمجة المجانية ومفتوحة المصدر، وقد تطورت بسرعة كبيرة جداً من خلال ما تقدمه هذه اللغة من تقنيات وأدوات ومكتبات أو حزم(Packages) لدراسة وتحليل العديد من النظريات العلمية والمسائل الرياضية والإحصائية المختلفة، بطرق ومفاهيم جديدة لم تكن متوفرة من قبل مقارنة باللغات والبرمجيات المعروفة **[5]**. المكتبة MetaheuristicOpt هي إحدى المكتبات في لغة R تم إصدارها بتاريخ 2019/6/19 تتكون من مجموعة من الأوامر والوظائف الخاصة بتطبيق الخوارزميات الحديثة لحل المسائل الرياضية المختلفة. الوظيفة الرئيسية لخوارزمية الذئب الرمادي، الدالة GWO من الاصدار (2.0.0) التي يمكن أن نوضح متغيراتها من خلال النقاط التالية:

```
GWO)
FUN = objective function
,optimType = "MIN"
,numVar = numVar
,numWolves = 40
,maxIter = 500
,rangeVar=rangeVar)
```

1. FUN تمثل دالة اللياقة أو الصلاحية التي ترتبط بدالة الهدف للمسألة قيد الدراسة.
2. optimType تحدد إذا كانت المسألة تقليل أو تعظيم لدالة الهدف.
3. numWolves عدد الذئاب.

4. maxIter رقم عددي يمثل عدد التكرار وشرط الإيقاف.
5. rangeVar مصفوفة تمثل الحد الأدنى والحد الأعلى لكل متغير في فضاء البحث.

3.3. خطوات بناء خوارزمية الذئب الرمادي

بعد إتمام عملية تنزيل لغة R وتنصيب المكتبة MetaheuristicOpt من الموقع الرسمي https://cran.r-project.org. تتضمن الخوارزمية المقترحة عدد من الخطوات الأساسية المترابطة مع بعضها البعض، التي تم بناؤها باستخدام البرمجة المتقدمة والدوال والوظائف المتوفرة بالمكتبة MetaheuristicOpt، ومن أجل التوضيح أكثر فإنه يمكن استخدام بيانات نموذج تقليل دالة الهدف أدناه واتباع

الخطوات التالية:

1. متجه يحدد قيم متغيرات دالة الهدف.

```
R>  p <- c(1,1,1)
```

2. متجه يحدد قيم المتغيرات في كل قيد.

```
S1 <- c(3,1,5)
S2 <- c(7,6,2)
S3 <- c(4,8,3)
```

3. الأرقام التي تمثل الطرف الأيمن للقيود.

```
RHS1 <-  1
RHS2 <-  1
RHS3 <-  1
```

4. Min_ objective برمجة دالة الهدف وتحديد القيود.

```
Min_ objective <-
function(x) sum (x * p)
constraints <- list (
,function(x) sum(S1 * x) - RHS1
,function(x) sum(S2 * x) - RHS2
function(x) sum(S3 * x) - RHS3
```

5. تحديد عدد المتغيرات في دالة الهدف وحدود فضاء البحث.

```
numVar<-3
rangeVar <-matrix(0,0,0,
1,1,1),
nrow=2,byraw=TRUE)
```

6. تنفيذ الدالة GWO مع تحديد عدد الذئاب وفضاء البحث وشرط التوقف للخوارزمية.

```
set.seed(42)
result <- GWO
(
,FUN= Min_ objective
,numVar = numVar
,numWolves = 40
,maxIter = 700
)rangeVar= rangeVar
```

7. عرض النتائج وتحديد القيم المثلى لمتغيرات القرار ودالة الهدف.

```
x <- result$bestVar.
Z <- sum(p * x)
cat("Best solution (s1, s2, s3):",
sprintf("
%.6f %.6f %.6f",
result$bestVar[1]
```

4. الجانب التطبيقي

تم تطبيق الخوارزمية على نماذج للبرمجة الخطية في حالة التقليل والتعظيم لدالة الهدف، منشورة في المجلات العلمية العربية والدولية، ومقارنة نتائج الخوارزمية المقترحة بالخوارزميات الجينية وخوارزمية سرب الجسيماتPSOو MPSO) Nelder-Meadو GPSO والطرق الأخرى، ومنها الطريقة المبسطة والحزمة البرمجية Tora Software من خلال الآتي:

أ-نموذج البرمجة الخطية لتقليل دالة الهدف من المؤلفين Samuelو Ekoko (2024)، حيث استخدما الحزمة

البرمجية Tora Software لتحديد قيمة دالة الهدف ومتغيرات القرار S_1, S_2, S_3. نموذج البرمجة الخطية لتقليل دالة الهدف موضح كما يلي **[12]** :

$$\text{Minimize } Z = S_1 + S_2 + S_3$$

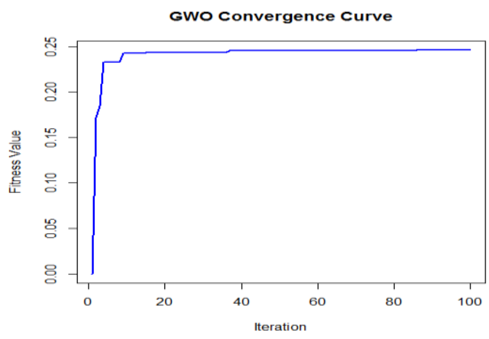
subject to

$$3S_1 + S_2 + 5S_3 \geq 1$$
$$7S_1 + 6S_2 + 2S_3 \geq 1$$
$$4S_1 + 8S_2 + 3S_3 \geq 1$$
$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

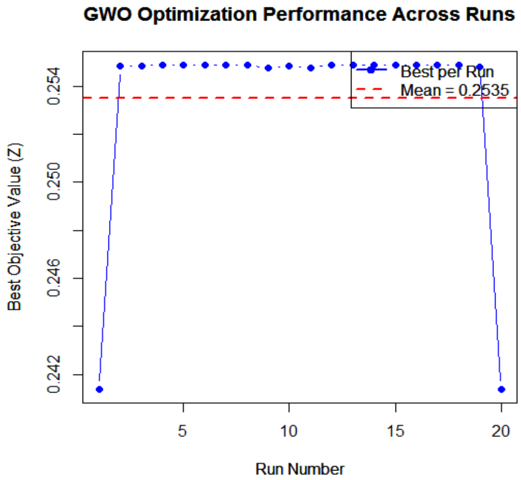
تم تطبيق خوارزمية الذئب الرمادي على نموذج البرمجة الخطية السابق، ومعلمات ونتائج حل الخوارزمية لهذا النموذج موضحة في الجدول رقم (1)، الذي يوضح المتوسط الحسابي والانحراف المعياري وكذلك نتائج تنفيذ الخوارزمية لعدد 20 تكرار مستقل (Independent runs)، أما شكل رقم **(1)** فيوضح تقارب الخوارزمية نحو الحل الأمثل خلال 100 تكرار، بينما يوضح شكل رقم **(2)** أداء الخوارزمية خلال 20 تكرار مستقل.

جدول 1. نتائج خوارزمية الذئب الرمادي.

GWO Performance Summary	
Runs	= 20
Wolves	= 70
Iterations	= 100
Fmin (Best)	= 0.2413685879
Fmax (Worst)	= 0.2548884765
Mean (Average)	= 0.2541831212
SD (Std. Dev.)	= 0.0030164071
Mean Time	= 7.9763 sec
SD Time	= 0.3010 sec
Best solution (s1, s2, s3):	0.071821 0.032708 0.150342
Best objective value (Z):	0.254871



شكل 1. تقارب الخوارزمية نحو الحل الأمثل.



شكل 2. أداء الخوارزمية خلال 20 تكرار مستقل.

ب– نموذج البرمجة الخطية لتعظيم دالة الهدف من الورقة العلمية للمؤلف سلمان منى(2024) الذي استخدم الخوارزمية الجينية لتحديد قيمة دالة الهدف ومتغيرات القرار M,Y ومقارنتها بالطريقة المبسطة **[17]**. نموذج البرمجة الخطية لتعظيم دالة الهدف موضح كما يلي :

$$Maximize\ z = 0.65M + 0.45Y$$

Subject to

$$2M+3Y\leq 400000$$
$$3M+1.5Y\leq 300000$$
$$M\leq 90000 \quad ,\geq 0$$

تم تطبيق خوارزمية الذئب الرمادي على نموذج البرمجة الخطية السابق، ونتائج حل الخوارزمية لهذا النموذج موضحة في الشكل رقم (3) والشكل رقم (4) والجدول رقم (2).

جدول 2. نتائج خوارزمية الذئب الرمادي.

GWO Performance Summary

---+

Runs = 20

Wolves = 100

Iterations = 100

Fmax (Best) = 77499.644590

Fmin (Worst) = 77494.670394

Mean (Average) = 77497.8052

SD (Std. Dev.) = 1.211105

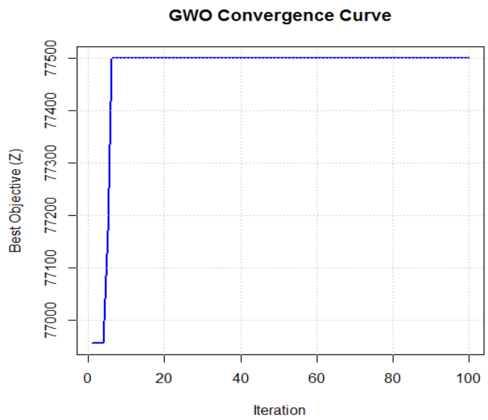
Mean Time = 13.7179 sec

SD Time = 0.4272 sec

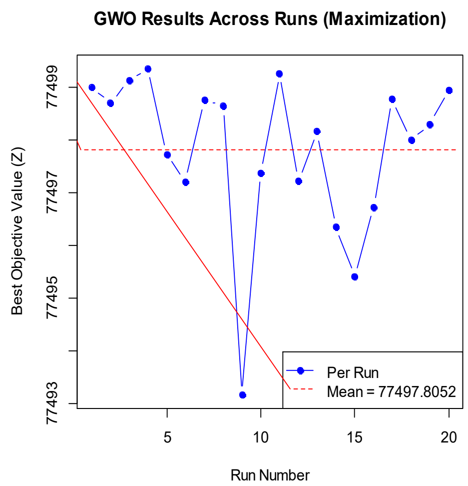
Best solution (M, Y)

100000.06 49999.53

Best objective value (Z): 77499.724196



شكل 3. تقارب الخوارزمية نحو الحل الأمثل.



شكل 4 . أداء الخوارزمية خلال 20 تكرار مستقل.

ج–نموذج البرمجة الخطية لتقليل دالة الهدف الذي يمثل الحالة الخاصة من البرمجة الخطية المعروفة باسم الحالة الدورية cycling linear programming، من المؤلفين Amali and Vijayarajan (2015)، حيث يشير الcycling إلى الحالة التي يعيد فيها الحل إلى التكرار دون إحراز أي تقدم نحو تحسين دالة الهدف، مما يؤدي إلى دخول خوارزمية simplex في حلقة لا نهائية. استخدما المؤلفان خوارزمية سرب الجسيمات التقليدية PSO ونسخها المعدلة NMPSO Nelder-Mead وGPSO لتحديد قيمة دالة الهدف ومتغيرات القرار $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{11}$. لمسألة Hoffman المعيارية. نموذج البرمجة الخطية لتقليل دالة الهدف الذي يمثل الحالة التكرارية موضح كما يلي **[15]**:

Minimize

$$-2.2361x4 + 2x5 + 4x7 + 3.6180x8 + 3.236x9 + 3.6180x10 + 0.764x11$$

subject to

$$x1 = 1$$

$$x2 + 0.3090x4 - 0.6180x5 - 0.8090x6 - 0.3820x7 + 0.8090x8 + 0.3820x9 + 0.3090x10 + 0.6180x11 = 0$$

$$x3 + 1.4635x4 + 0.3090x5 + 1.4635x6 - 0.8090x7 - 0.9045x8 - 0.8090x9 + 0.4635x10 + 0.3090x11 = 0$$

$$xj \geq 0$$

تم تطبيق خوارزمية الذئب الرمادي على نموذج البرمجة الخطية السابق، ومعلمات ونتائج حل الخوارزمية لهذا النموذج موضحة في الجدول رقم (3)، الذي يوضح المتوسط الحسابي والانحراف المعياري وكذلك نتائج تنفيذ الخوارزمية لعدد 50 تكرار مستقل (Independent runs)، أما شكل رقم (5) فيوضح تقارب الخوارزمية نحو الحل الأمثل خلال 100 تكرار بينما يوضح شكل رقم (6) أداء الخوارزمية خلال 50 تكرار مستقل.

جدول 3. نتائج خوارزمية الذئب الرمادي.

GWO Performance Summary

--------------------------+

Number of Runs = 50

Wolves = 80

Iterations = 800

Fmin (Best) = −0.0000000000

Fmax (Worst) = −0.0000000000

Mean (Average) = −0.0000000000

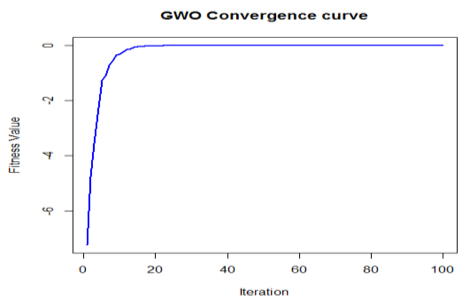
SD (Std. Dev) = 0.0000000000

Mean Time = 29.4413 sec

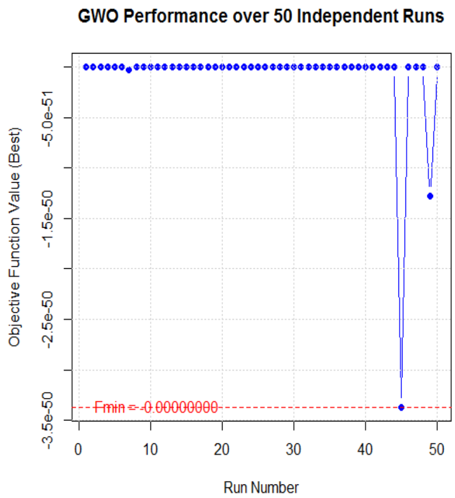
SD Time = 0.2203 sec

… Running GWO iteration 4 / 20

[1] 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0



شكل 5. تقارب الخوارزمية نحو الحل الأمثل.



شكل 6. أداء الخوارزمية خلال 50 تكرار مستقل.

5. النتائج

يوضح الجدول (4) نتائج تنفيذ خوارزمية الذئب الرمادي لحل نموذج البرمجة الخطية لتقليل وتعظيم دالة الهدف، ومقارنتها بنتائج الحزمة البرمجية (Tora) والخوارزمية الجينية والطريقة المبسطة. أما مقارنة نتائج الخوارزمية المقترحة لحل النموذج الثالث لمسألة Hoffman الدورية القياسية بخوارزمية GPSO وNMPSO وPSO فإنها موضحة بالجدول رقم (5).

جدول 4. نتائج مقارنة الخوارزمية المقترحة بالخوارزمية الجينية والطريقة المبسطة.

xij	Tora	GWO		simplex	GA	GWO
Z	0.2549	0.2523	Z	77500	77500	77499.9
s1	0.0719	0.0718	M	500000	50010	49999.9
s2	0.0327	0.0327	Y	100000	100000	100000
s3	0.1503	0.1503				

جدول 5. نتائج مقارنة الخوارزمية المقترحة والخوارزميات GPSO وNMPSO وPSO.

xij	Best sol	PSO	NMPSO	GPSO	GWO
Fmin	0	59.06	8.5881E-004	2.1583e-007	-0.000000
X1	1	1.0000	1.0000	1.0000	1
X2	0	0.9554	0.0000	0	0
X3	0	2.3544	0.0000	0	0
X4	0	1.4952	0.0000	0	0
X5	0	6.3246	0.0001	0	0
X6	0	0.3145	0.0000	0	0
X7	0	6.4033	0.0001	0	0
X8	0	3.8325	0.0000	0	0
X9	0	0.0717	0.0000	0	0
X10	0	2.3162	0.0000	0	0
X11	0	2.1814	0.0001	0	0

من خلال نتائج المقارنة يبين الجدول رقم (4) أن الخوارزمية المقترحة حققت قيمة دالة الهدف في حالة

التقليل، وكذلك قيم متغيرات القرار المثلىs1,s2,s3 مقارنة بقيم الحل الأمثل للحزمة البرمجية Tora-software. كما يبين الجدول رقم (4) أن خوارزمية الذئب الرمادي المقترحة توصلت إلى تحقيق قيمة دالة الهدف في حالة التعظيم، و نتائج أفضل من الخوارزمية الجينية في تحديد قيم متغيرات القرار المثلىM,Y، ومساوية لطرق حل نماذج البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة. كما تظهر النتائج أن خوارزمية GWO حققت الحل الأمثل النظري تماماً لمسألة Hoffman القياسية حيث كان الانحراف المعياري مساوياً للصفر، بينما لم تصل خوارزميات PSO والنسخ المعدلة منها NMPSOو GPSOإلى نفس الدقة إلا بعد عدد كبير من التكرارات. مما يشير إلى أن الخوارزمية المقترحة تمتاز باستقرار عال وعدم تأثر كبير بالعشوائية الأولية للمجتمع الابتدائي. وبالتالي يمكن استخدامها بكفاءة عالية وملحوظة، سواء في حل مسائل البرمجة الخطية الدورية وغير الدورية.

6. الاستنتاجات

من خلال ما تقدم تبين أن خوارزمية الذئب الرمادي المقترحة فعالة في إيجاد الحل الأمثل لمسائل البرمجة الخطية والحالات الخاصة منها، وأدت إلى تحسين كبير في النتائج، وكذلك امكانية الوصول إلى الاستنتاجات التي تتضمن أهمية ضبط متغيرات خوارزمية الذئب الرمادي، وخاصة زيادة عدد الذئاب لتحسين الاستكشاف في البحث عن الحلول، وزيادة عدد التكرارات من أجل الحصول على دقة عالية في النتائج، إذا كان الهدف تحقيق الحل الأمثل، بالإضافة إلى أهمية ضبط استخدام الدالة set. seed ( ) للحصول على نتائج قابلة للتكرار.

7. التوصيات

1. أهمية استخدام لغة R والحزم المصاحبة لها في بناء الخوارزميات وإيجاد حلول للعديد من المسائل الرياضية الخطية وغير الخطية.

2. أهمية المكتبة MetaheuristicOpt التي توفر للمستخدمين والباحثين مجموعة من الخوارزميات الحديثة التي تحاكي الظواهر الطبيعية، لمقارنة أدائها في إيجاد الحل الأمثل أو القريب من الحل الأمثل للعديد من النماذج الرياضية التي تمثل المشاكل الواقعية.

3. أما بخصوص الأعمال المستقبلية فإنه يمكن استخدام خوارزمية الذئب الرمادي المقترحة في إيجاد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية العددية أو المختلطة عندما تكون متغيرات القرار كثيرة، وهذا يتطلب فقط تغيير طول كل متجه والأبعاد ومقارنة النتائج بالخوارزميات الحديثة التي سبق الإشارة إليها في هذه الورقة البحثية، مثل خوارزمية الثقب الأسود أو مقارنتها بالمكتبات المصاحبة للغة **R** مثل **Linprog** أو بالبرمجيات المتخصصة مثل**Lingo Ampl**.

المراجع

[1] محمود العبيدي ، مؤيد عبد الحسين الفضل. بحوث العمليات و تطبيقاتها في إدارة الأعمال. *عمان: مؤسسة الوراق*، **2004**،، ص22.

[2] محمد النعيمي ، رفاه الحمداني ، أحمد الحمداني. بحوث العمليات . *عمان: دار وائل للنشر*، **1999**، ص25.

[3] فتحي حمدان، رشيق مرعي. مقدمة في بحوث العمليات تطبيقات وخوارزميات. *عمان : دار وائل للنشر*، **2004**، ص 23.

[4] S. Mirjalili, S. M. Mirjalili, A. Lewis. Grey Wolf Optimizer. *advengsoft* ,**2014**, vol. 69, 46-61.https://dx.doi.org/10.1016/j.advengsoft.2013.12.007

[5] Lala Septem Riza ;Iip, Eddy Prasetyo Nugroho, Muhammad Bima, Adi Prabowo, Enjun Junaeti ,Ade Gafar Abdullah ,R package (metaheuristicOpt), Date **2019-06-19**.URL https://cran.r-project.org

[6] Arne Henningsen, R Package(linprog), Linear Optimization problems by using the simplex algorithm. Date **09-03-2022**.URL http://linprog.r-forge.r-project.org/

[7] Sharif Naser Makhadmeh, Mohammed Azmi AL-Betar, Iyad Abu Doush, Mohammed A. Awadallah, Sofian Kassaymeh, Seyedali Mirjalli. Recent Advances in Grey Wolf

Optimizer, Its Versions and Applications: Review. *IEEE ACCES*,**2024**, 12.DOI: 10.1109/ACCESS.2023.3304889

[8] Khin Kye Mon. Simplex Method for Solving Maximum Problems in Linear Programming. *ijsea*,**2019**,8,pp.410-415.

[9] Danfulani, U. B.; Joshua, A. Y.; Oludele, R. A.; Hassan M. , Jonathan T. Application of Linear Programming Model for Optimal Production Planning: A Case Study of Adama Beverages, Jimeta Yola, Adamawa State, Nigeria. *JJSR*, , **2022,**7(2) pp. 268–278.

[10] سحر فتح الله محمد علي، استعمال البرمجة الخطية لتحديد التشكيلة المثلى للإنتاج في ظل ندرة الموارد الاقتصادية المتاحة للوحدات الاقتصادية. *مجلة الريادة للمال والأعمال*، المجلدالرابع،(**2023**)،112-123. DOI: https://doi.org/10.56967/ejfb2023259

[11] Bhawna Agrawala, Pappu Kumar. An Approach Of L.P.P Method-Game Problem Using Simplex Method. *IJRAR***, 2022,** Volume 9, Issue 4,pp. 927-935.

[12] George Obed Samuel, P.O. Ekoko. Formulation Of Game Model As A Linear Programming Problem Using Various Model. *AJMSS*, **2024**, Volume7,Issue2,pp.79-95. http://dx.**doi**.org/**10.52589/ajmss-xhfxszp7**.

[13] Safwa M. Baki, Jack K. Cheng. A Linear Programming Model for Product Mix Profit Maximization in A Small Medium Enterprise Company. *IJIM*,**2021**, VOL. 9, 64 –73. DOI: https://doi.org/10.15282/ijim.9.0.2021.5956

[14] افتخار علي حسين، سوزان عباس عبدالله. حل مشكلة البرمجة الخطية في ظل عدم اليقين باستخدام برمجة الفاصلة التقريبيه، *مجلة الجامعة العراقية*، المجلد 64،(**2023**)،528-539. **https://www.iasj.net/iasj/issue/2776**

[15] Geraldine Bessie Amali. and Vijayarajan. Accurate Solution of Benchmark Linear Programming Problems Using Hybrid Particle Swarm Optimization (PSO) Algorithms. International Journal of Applied Engineering Research,**2015**, vol. 10, pp. 9101-9110. https://www.researchgate.net/publication/28205373

[16] Aliannezhadi S, Abbasi Molai A. A new algorithm for solving linear programming problems with bipolar fuzzy relation equation constraints. *IJNAO*. 2021;11:407-435. doi:10.22067/ijnao.2021.67046.0

[17] منى شاكر سلمان، تحسين البرمجة الخطية باستخدام تقنيات الذكاء الاصطناعي : دراسة تجريبية. مجلة **الادارة** والاقتصاد، الجامعة المستنصرية، **المجلد** 49،(**2024**)، 56-68 .

DOI: https://doi.org/10.31272/jae.i143.1197